

Bài 3. Bội chung nhỏ nhất

A. Tóm tắt lý thuyết

3.1. Bội chung nhỏ nhất

a) Số nguyên m được gọi là bội chung của các số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n nếu nó chia hết cho mỗi số đó.

b) Bội chung m của các số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n được gọi là bội chung nhỏ nhất của các số này (BCNN) nếu nó là ước của mọi bội chung của a_1, a_2, \dots, a_n .

c) Nếu m và m' là BCNN của các số a_1, a_2, \dots, a_n thì $m = \pm m'$. Trong trường hợp $m > 0$ ta kí hiệu $m = \text{BCNN}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ hoặc $m = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ và quy ước gọi nó là BCNN của a_1, a_2, \dots, a_n .

3.2. Tìm bội chung nhỏ nhất

$$a) \text{BCNN}(a, b) = \frac{ab}{\text{ƯCLN}(a, b)}$$

$$b) \text{BCNN}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{BCNN}((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

3.3. Tính chất

$$a) m = \text{BCNN}(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \text{ƯCLN}\left(\frac{m}{a_1}, \frac{m}{a_2}, \dots, \frac{m}{a_n}\right) = 1$$

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Tìm bội chung nhỏ nhất của các số nguyên

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa và tính chất của bội chung nhỏ nhất
- Xét các trường hợp có thể có của một số theo một tính chất nào đó

Ví dụ. Tìm $\text{BCNN}(a, a+2), a \in \mathbb{N}$.

Giải

Trước hết ta có:

$$\text{ƯCLN}(a, a+2) = \begin{cases} 1, & a = 2k+1 \\ 2, & a = 2k \end{cases}$$

và

$$\text{BCNN}(a, a+2) = \frac{a(a+2)}{\text{ƯCLN}(a, a+2)}.$$

Do đó:

- Nếu $a = 2k+1$ thì

$$\text{BCNN}(a, a+2) = a(a+2).$$

- Nếu $a = 2k$ thì

$$\text{BCNN}(a, a+2) = \frac{a(a+2)}{2}.$$

Dạng 2. Chứng minh một số nguyên chia hết cho một số nguyên

Phương pháp:

- Sử dụng tính chất chia hết của số nguyên
- Sử dụng định nghĩa và các tính chất của bội chung nhỏ nhất

Ví dụ 1. Chứng minh rằng tích của sáu số nguyên liên tiếp chia hết cho 720.

Giải

Sáu số nguyên liên tiếp chứa ba số chẵn liên tiếp.

Một trong các số chẵn đó chia hết cho 4,

bởi vậy tích P của sáu số nguyên liên tiếp chia hết cho $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Mặt khác, trong sáu số nguyên liên tiếp có hai số chia hết cho 3, do đó tích P chia hết cho 9.

Cuối cùng trong sáu số nguyên liên tiếp phải có một số chia hết cho 5.

Các số 16, 9, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên tích P chia hết cho $16.9.5 = 720$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $m \in \mathbb{Z}$, ta có: $m^3 + 11m : 6$.

Giải

Ta có:

$$m^3 + 11m = (m^3 - m) + 12m = (m - 1)m(m + 1) + 12m.$$

Vì $(m - 1)m(m + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6, do đó

$$m^3 + 11m = (m - 1)m(m + 1) + 12m.$$

chia hết cho 6.